(p, q, r) 三角形密铺

1. 基本定义与分类依据

- 内角：$\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ ，其中 p, q, r 为正整数。
- 密铺存在的空间条件：
  - 球面 (K > 0): $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$
  - 欧氏平面 (K = 0): $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$
  - 双曲平面 (K < 0): $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$

2. 球面密铺 (5, 3, 2) 与高斯-博内定理

2.1 几何意义

(5, 3, 2)对应一个球面三角形，其三个顶点位于球面上，三条边是连接这些顶点的大圆弧。这种三角形是构建密铺的基本单元。

2.2 有限解及其对应的柏拉图立体

满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$ 的整数解(p, q, r)仅有以下四类

$(2,2,n)$	正棱柱$(Prism)$和反棱柱$(Antiprism)$
(2,3,3)	正四面体$(Tetrahedron)$
(2,3,4)	正八面体$(Octahedron)$
(2,3,5)	正十二面体$(Dodecahedron)$

2.3 高斯-博内定理$(Gauss - Bonnet\ \ Theorem)$

这是连接局部几何（曲率）与整体拓扑（欧拉示性数）的核心定理。

- 一般形式： 对于二维紧致无边曲面 M，有：

$$\int_M K\, dA = 2\pi\chi(M)$$

  $-\ \chi(M)$：曲面M的欧拉示性数。

- 带边界形式：对于曲面 M 上的一个单连通有界区域 D，其边界 ∂D 由若干条分段

光滑的测地线构成，则：

$$\int_D K\,dA+\sum_{i=1}^{n}\theta_i=2\pi\chi(D)$$

– K: 高斯曲率。
– dA: 面积元。
– θ_i：边界在第 i 个顶点处的外角。
– $\chi(D)$：区域 D 的欧拉示性数。
– 对于单连通区域：$\chi(D)\ =\ 1$。

- 球面三角形角盈：由于球面曲率 $K=\frac{1}{R^2}$ 为常数，且$\theta_i=\pi-$内角$_i$，代入整理可得：

$$A+B+C-\pi=\frac{S_T}{R^2}$$

对于球面密铺 (5, 3, 2) 与 $R=1$，$S_T=\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{30}$ ，则该密铺由 120 个基本三角形构成。

2.4 欧拉公式与正十二面体

- 欧拉公式： $V-E+F=2$
- 正十二面体： $V=20,E=30,F=12$
- 验证： $20-30+12=2$，符合公式

3. 双曲密铺 (7, 3, 2) 与庞加莱模型

3.1 几何性质

- 角亏： $\delta=\pi-(A+B+C)>0$根据高斯-博内定理，这等于该三角形面积乘以曲率的绝对值。
- 曲率： $K=-k^2$ (其中 $k>0$)，为了简化计算，通常取 $k=1$，即 $K=-1$。
- 双曲密铺可以通过球极投影变换从半球面模型导出至庞加莱圆盘中观察。

3.2 庞加莱圆盘模型

这是研究双曲几何最常用的模型之一，将整个双曲平面映射到单位圆盘内部。

- 度量： $ds^2=\frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-(x^2+y^2))^2}$ 对应高斯曲率 $K=-1$。
- 面积元： $d\mu=\frac{dxdy}{(1-(x^2+y^2))^2}$
- 等距变换（$Isometry$）：双曲平面上的等距变换（如反射、平移、旋转）在此模型中

表现为保持单位圆盘不变的莫比乌斯变换。

- 反演：$z' = c + \frac{r^2}{z-c}$ 是构造双曲反射的关键工具。

4. Coxeter 群、Coxeter 图与三角群

4.1 Coxeter 群定义

Coxeter 群是一类由反射生成的离散群，是研究对称性和密铺的强大工具。

- 生成元：$S = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$，每个 r_i 代表一个反射 ($Reflection$)。
- 关系：$(r_i r_j)^{m_{ij}} = 1$，其中 $m_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 2,3,\ldots,\infty & i \neq j \end{cases}$ 定义了两个反射之间的关系。

  如：$m_{ij} = 2$ 表示 r_i 和 r_j 可交换；$m_{ij} = \infty$ 表示 r_i 和 r_j 之间没有额外的关系。

4.2 Coxeter 图

Coxeter 图是 Coxeter 群的一种直观表示方法。

- 顶点：每个生成元 r_i 对应一个顶点。
- 边：如果 $m_{ij} \geq 3$，则在顶点 i 和 j 之间画一条边，边上标记数字 m_{ij}

  若 $m_{ij} = 2$，不画边；若 $m_{ij} = 3$通常省略数字标记。

- 三角群示例：$\Delta(p, q, r)$ 的 Coxeter 图是一个三角形，三个顶点分别代表三个反射生成元，三条边分别标记为 p, q, r。这个图完全决定了群的结构。三角群 $\Delta(p, q, r)$ 是一类特殊的 Coxeter 群，它作用于球面、欧氏平面或双曲平面，通过反射一个基本三角形（其内角为 $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ 来生成相应的密铺。
- 群的阶：三角群 $\Delta(p, q, r)$ 的阶公式为：

$$|\Delta(p, q, r)| = \frac{4}{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) - 1}$$

  对于 (5,3,2)，我们有：$|\Delta(5,3,2)| = \frac{4}{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-1} = \frac{4}{\frac{31}{30}-1} = \frac{4}{\frac{1}{30}} = 120$这也是正十二面体的旋转对称群的阶数，与球面密铺数量相对应。